Della legge fondamentale delle verghe vibranti e delle canne a bocca.

Memoria IX. del Prof. Francesco Zantedeschi.

(Con una tavola.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 22. Juli 1858).

Moltistudj e molti esperimenti io feci per venire in chiaro della legge fondamentale, che si osserva nelle vibrazioni di una verga liberamente sospesa. Io mi limiterò, per tutta brevità, ai seguenti.

Sperimentando sopra verghe di acciajo perfettamente omogenee e di forma quadrata precisa, ho riscontrato esattamente la medesima legge che ho esposta nella mia V. Memoria di Acustica. La verga era della lunghezza di $0^m_{,}88$ e del lato quadrato di $0^m_{,}011$ sospesa in una direzione verticale ad un filo di seta fermato ad un uncino di filo di ottone che al capo superiore della verga era inserito. Essa perciò poteva liberamente vibrare in tutte le direzioni senza incontrare ostacolo veruno.

Percuotendola impertanto in direzione normale al suo asse, ho riscontrata l' esistenza dei nodi come in una corda convenientemente tesa cioè a

$$0^m_{,}\ 70{\cdot}4;\ 0^m_{,}\ 58{\cdot}67;\ 0^m_{,}\ 44;\ 0^m_{,}\ 29{\cdot}33;\ 0^m_{,}\ 17{\cdot}6.$$

Negli intervalli a questi numeri ho riscontrato sempre il medesimo tono fondamentale, cioè il *fa* di 8 piedi cogli armonici ottava, decima ossia *la* quintadecima ossia *fa* e decima settima ossia *la*. Battuta la verga col martello di ferro diede le note precedenti; ma le più sentite furono il *fa* quintadecima, alla quale tenne dietro nell' ordine dell' intensità la decima *la*. Tutte queste note furono contemporanee o concomittanti. Ma percuotendo la verga alle sezioni rappresentate dai numeri sopraindicati, cioè a $0^m_{,}\ 70{\cdot}4$; $0^m_{,}\ 58{\cdot}67$; $0^m_{,}\ 44$; $0^m_{,}\ 29{\cdot}33$; $0^m_{,}\ 17{\cdot}6$, ho ritrovato un tono velato e di un quarto circa più basso di quello degli intervalli o dei ventri, e non ugualmente aggradevole. Quello però corrispondente a $0^m_{,}\ 44$

fu un po' meno velato degli altri. Qualunque fosse la faccia, sulla quale esercitava la percossa col martello in direzione normale all' asse della verga, il risultamento fu sempre lo stesso. E perciò conchiusi all' identità della legge archetipa delle corde e delle verghe vibranti liberamento, in ogni loro direzione.

Percuotendo la verga in direzione longtudinale corrispondente all' asse della medesima non ebbi che un tono fondamentale scevro da ogni armonico, che fu il *fa* di un piede. E di questa proprietà credo potersene trarre utile applicazione per un nuovo istrumento musicale a verghe, del quale io mi riservo in faccia del pubblico la priorità dell' idea per poterla sviluppare in seguito senza che mi sia da altri contrastata.

La medesima legge che ho riscontrata nelle verghe prismatiche, verificai ancora nelle verghe cilindriche di acciajo le più omogenee. Io mi limiterò a riferire il caso di una verga cilindrica della lunghezza di $0^{m}_{,}$ 45.8, del diametro di $0^{m}_{,}$ 013. Anche in questa i nodi si manifestarono a $0^{m}_{,}$ 36·64; a $0^{m}_{,}$ 30·54; a $0^{m}_{,}$ 22·9; a $0^{m}_{,}$ 15·26; a $0^{m}_{,}$ 09·16. Da queste posizioni dei nodi, gl' intervalli risultarono di $0^{m}_{,}$ 09·16; $0^{m}_{,}$ 06·10; $0^{m}_{,}$ 07·64; $0^{m}_{,}$ 07·64; $0^{m}_{,}$ 06·10; $0^{m}_{,}$ 09·16. Io ho voluto, che i maestri dell' arte i più valenti e gli accordatori degli strumenti a corda i più distinti fossero giudici della posizione dei nodi sopra indicati.

Questa verga percossa con un martello di feltro circa alla distanza di un quarto dai punti di sospensione il suono più netto che diede fu il *sol* del *do* di un piede, che ha per fondamentale il *re* di 2 piedi, il quale fu poco sensibile. Gli altri furono poco distinti; tuttavia si potè percepire il *sol* di mezzo piede.

Tenuta la verga con due dita alla metà, in una direzione verticale, e percossa fortemente col martello di metallo sul capo superiore, diede il *sol* di 3 pollici. Il braccio che teneva la verga era piegato verso la persona. Eseguita la percossa, nell' istante medesimo che il braccio si dispiegava con velocità, il suono si abbassava di alcune vibrazioni, cioè di circa $1/_{32}$ di tono; il che devesi ascrivere all' influenza del movimento sul corpo vibrante. E ciò si rende evidente daquesto, che dato che il moto sia lento, l'alterazione del tono non è percettibile; e nel primo caso si scorge alzarsi il tono o rinforzarsi della perdita fatta, durante il rapido movimento, nell' atto che veniva restituito allo stato di quiete.

Impiantata ad un capo, la verga, in una morsa di ferro e percossa con un pezzo di legno ad un quarto dall' estremità libera diede l'ottava acuta di quella che risultò allorchè veniva percossa ad un quarto dal punto di sospensione. Il suono però era muto, come si dice; e negli intervalli non si aveva neppure questo.

Accorciata la verga da ridur fuori della morsa la parte libera a $^2/_3$ di tutto, il fenomeno si è invertito, cioè si ebbe un tono gravissimo percuotendola al terzo incominciando dall' estremità libera; ed un tono acutissimo percuotendola al terzo dal punto di sospensione. Ancor quì i suoni furono muti.

Per il differente collocamento della verga il tono fondamentale passò dal *la* di 16 piedi al *si*^{b} di un quarto di piede, ora isolato ed ora accompagnato da' suoni armonici. In qualche caso rimase la verga muta. Non si saprebbe ancora dare di tutti questi fenomeni una compiuta teoria: e mi è increscevole il dire, che non tutti s'accordano con quelli dei Trattatisti.

Queste medesime investigazioni speciali fatte sulla verga cilindrica, furono ancora da me eseguite sulla verga prismatica e con maggiore estensione, allo scopo di vedere quali fenomeni particolari risultassero dal collocamento diverso in cui era posta la verga. E a questo fine io feci costruire un' apparato, quale è rappresentato dall' annessa tavola. I risultamenti che m'ebbi io non li trovo descritti nelle Memorie e nei Trattati di Acustica, tanto antichi che moderni, e perciò io credetti doverli far seguitare alla legge archetipa come feci dei particolari fenomeni, che presentano le corde armoniche. Per tutta brevità io li descriverò in un modo aforistico:

I. La verga fu sospesa orizzontalmente all' ansa di un cordoncino di seta, passante pel centro di gravità. Percossa tanto col martello di feltro che di ferro nella direzione normale alla lunghezza, diede la fondamentale, che fu il *fa* di 4 piedi. L'armonico più distinto fu il *la* di un piede, al quale in intensità succedette il *fa* di un piede. È a notarsi che l'ultimo ad estinguersi fu il *fa* di un piede, cioè l'armonico meno intenso. Fenomeno che pare singolare.

Percossa la verga ad uno de' capi, tanto col martello a feltro che a ferro, diede la fondamentale *fa* di 2 piedi leggerissimo, appena percettibile. Gli armonici furono: il *la* di 2 piedi, terza successiva, e il *fa* di 3 pollici, con voci intermedie poco distinte che non poterono essere determinate.

L'ultimo ad estinguersi fu il *fa* di 3 pollici. È degno di osservazione il notare, che tenuta la verga vibrante con due dita, police ed indice, l'acuto di 3 pollici non si estinse tosto, come si estinsero gli altri suoni.

II. Sospesa la verga orizzontalmente colle due anse di cordoncino di seta presso le due estremità, cioè alla distanza prossimamente di un centimetro, diede (percossa dall' alto al basso in prossimità del centro di gravità) la fondamentale *la* di 2 piedi. Gli armonici furono: l'ottava *la* di un piede, e il *la* sopra acuto di 3 pollici. L'ultimo ad estinguersi fu l'acutissimo.

Diretta la percossa orizzontalmente, o sopra una delle faccie verticali tanto col martello a ferro, che a feltro, la fondamentale fu il *la* di 2 piedi; ma è a notarsi, che l'armonico più acuto fu il *fa* di un pollice e mezzo, il quale fu pure l'ultimo ad estinguersi e di una lunghissima durata.

III. Le due anse dei cordoncini furono collocate ad un terzo dall' estremità, e la fondamentale fu il *la* di 2 piedi; ed è a notarsi che gli armonici furono il *la* di un piede, ossia l'ottava, e il *si*♭ crescente di 6 pollici, di una durata lunghissima e di una forte e netta intensità. La fondamentale riuscì più distinta percuotendo la verga leggerissimamente ad uno de' capi. E in questo caso gli armonici acutissimi furono insensibili.

Sperimentando noi, tenute le anse di sospensione a 20 centimetri in luogo di 22, abbiamo trovato il fondamentale *fa* di 8 piedi, e gli acuti: *la* di 2 piedi, *fa* di un piede, *do* di 6 pollici e *fa*♯ di 3 pollici. Negli acuti v' ebbe frastuono.

Portate le anse ad un quarto, cioè a 22 centimetri dall' estremità, si ebbe il grave *fa* di 4 piedi; appresso il *fa* di un piede, il *re*♯ e *fa*♯ di 3 pollici. Pure si possa conchiudere, che al variare della posizione dei punti di sospensione, varino ancora i numeri pelle vibrazioni, ossia i toni emessi dalla verga vibrante.

Ritenuta la verga sospesa alle due anse collocate ad un quarto e percossa ad uno de' capi nella direzione dell' asse della verga si ebbe il *fa* di 6 pollici; il *la* pure di 6 pollici, ed il *fa*♯ di 3 pollici; ma fra il *la* di 6 pollici e il *fa*♯ di 3 pollici si notarono dei suoni che non poterono essere determinati.

Battuta la verga all' estremità sulla faccia verticale si udì il grave *fa* di 4 piedi coll' ottava, colla quintadecima; ed un acuto *re*♯ poco

sensibile di 3 pollici. Si noti che la verga fu percossa col martello di feltro e leggermente. Questi medesimi suoni non furono nè così distinti, nè di una durata egualmente lunga percuotendo la verga allo stesso modo sopra la faccia orizzontale superiore ed inferiore.

IV. Furono portate le anse in prossimità del centro di gravità alla distanza fra di loro di 12 centimetri. I suoni che si manifestarono furono: la fondamentale *la* di 2 piedi poco energica; il *la* di un piede energico; il *fa* di ½ piede, e il *si*♭ di 6 pollici. La verga fu percossa verso il centro di gravità nella direzione normale alla sua lunghezza.

Esercitata la percossa ad uno de' capi col martello di ferro, la fondamentale fu la stessa, cioè il *la* di 2 piedi. Gli armonici precedenti poco sensibili; ma si sviluppò un'acuto che fu il *fa*♯ di 3 pollici, di una durata ed una intensità rimarchevoli. Si udì anche dopo un minuto primo.

V. Poggiata la verga orizzontalmente alle due estremità sopra due sostegni coperti di pelle di dante, la verga comunque percossa rimase muta o pressochè muta.

VI. Allontanati i due sostegni dalle due estremità pel tratto di 6 centimetri, e percossa la verga in qualsivoglia direzione e con qualsivoglia martello non diede che il *fa* di un piede isolato.

VII. Portati i sostegni alla distanza di 7 centimetri da ciascheduna estremità, la verga si rese muta o pressochè muta sotto l'azione della percossa comunque esercitata.

VIII. Portati i sostegni alla distanza di 14 centimetri da cadauna estremità, diede il *la* di 6 pollici, comunque la percossa fosse diretta.

IX. Recati i sostegni alla distanza da cadauna estremità di 21 centim., diede il *fa* di 8 piedi fondamentale, e l' acuto *fa* di 3 pollici. Notisi che il grave fu quì l' ultimo ad estinguersi inversamente ai casi comuni.

X. Portati i sostegni alla distanza di 23 cent. e mezzo da cadauna estremità diede il *fa* di un piede isolato, comunque venisse percossa la verga.

XI. Portati i sostegni a 25 centimetri distanti dalle due estremità, si udì il *fa* basso di 8 piedi appena percettibile, e che si estinse subito dopo la percossa. Gli acuti furono: il *fa* di un piede netto e vibrante ed un acutissimo che non potè essere bene determinato e che si estinse quasi in istante.

XII. Recati i sostegni alla distanza di 30 centimetri da cadauna estremità della verga, si udì la fondamentale *fa* di 8 piedi di brevissima durata; il *la* di 2 piedi bene distinto, e il *fa*♯ circa di 3 pollici, di eguale durata.

XIII. Portati i sostegni alla distanza di 37 centimetri da cadauna estremità, si udì la fondamentale *do* di mezzo piede isolato, netto e di lunga durata, comunque fosse stata eseguita la percossa; ma avvicinati di un poco più i sostegni fra di loro, ossia un poco più allontanati dall' estremità, il *do* di mezzo piede non fu più netto.

XIV. Collocata la verga orizzontalmente sopra un sostegno coperto di pelle di dante pel suo centro di gravità, diede la fondamentale *fa* di 4 piedi, accompagnato dal *fa* di un piede.

XV. Fermata la verga orizzontalmente alle due estremità entro a due morse di legno pomo con viti di ferro, si udì un suono gravissimo, cioè il *la* di 16 piedi, percossa però la verga sopra una delle faccie verticali. Ma applicata la percossa ad una delle faccie orizzontali e nel centro di gravità, si udì il *fa* di 8 piedi, un poco sordo e di brevissima durata. — Per convincersi della provocazione di questi due suoni basta applicare la percossa successivamente sulle faccie orizzontali e verticali.

XVI. Ferma la verga ad un capo e libera in tutta la sua lunghezza, percossa sulle faccie orizzontali diede il *do* di 8 piedi, poco intenso, isolato e di breve durata.— Diretta la percossa sopra una delle faccie verticali, il fondamentale fu lo stesso; ma si udì concomitante il *fa* di un piede.

XVII. Ritenuta la verga in morsa ad una estremità, ed applicato il sostegno in pelle di dante ad un terzo dall' estremità libera, ossia a 28 centim., si udì un suono semiacuto inapprezzabile colla percossa; ma portato il sostegno ad una distanza minore di un terzo, si udì il *fa* di un piede, isolato.

XVIII. Sospesa la verga orizzontalmente con un' ansa ad una estremità, e col punto d' appoggio alla metà, si ebbe il *la* di 4 piedi e l' acuto *fa* di un piede.

XIX. Portato il punto d'appoggio ad un terzo, cioè a 27 centim. ed un terzo, si ebbe colla percossa del martello di ferro il *si*♭ di 3 pollici isolato. Questo suono si manifestò ugualmente percuotendo la verga anche ad uno de' capi.

XX. Portato il punto d'appoggio a 25 centimetri, cioè fra il terzo ed il quarto, si notò, percuotendo col martello di ferro, il *fa* di un piede, con il *la* acutissimo di un pollice e mezzo.

XXI. Portato il sostegno a 22 centimetri, cioè al quarto, e percossa la verga col martello di feltro si udì il *fa* di 8 piedi con il *fa* di mezzo piede.

XXII. Portato il sostegno a 17 centimetri e 6 millimetri, si udì, colla percossa del martello di feltro, il *fa* di 8 piedi col *fa* di mezzo piede; e colla percossa del martello di ferro si udì il *fa* di 3 pollici, accompagnato, al momento della percossa, d'altri suoni, che per la brevissima loro durata non poterono essere bene determinati dal tipo organo.

XXIII. Portato il sostegno a 14 centimetri e 6 millimetri, ossia al sesto della verga, si udì, colla percossa leggerissima del martello di feltro, il *fa* di 2 piedi accompagnato dal *fa* di mezzo piede; ma colla percossa del martello di ferro si manifestò il *si* calante di 3 pollici, isolato. La percossa fu esercitata sulle faccie tanto verticali che orizzontali; ma eseguita la percossa col martello di ferro sui capi, si udì un suono acutissimo, che dovrebbe appartenere all' ottava di tre quarti di pollice.

XXIV. Portato il sostegno alla distanza di 30 centimetri dall' estremità, si udì il *la* di 2 piedi con il *la* di mezzo piede, battuta però la verga col martello di feltro; ma battuta col martello di ferro si udì il *fa*♯ di 3 pollici. Ancor quì si verifica la variazione de' toni al variarsi della posizione del punto d'appoggio.

Dopo avere determinato in una mia precedente Memoria l'influenza dei varj elementi sulla tonalità delle canne a bocca, io cercai con molti modelli che mi feci costruire da varj maestri, se vi fosse una legge costante dalla quale avesse a dipendere la serie dei toni di un'ottava diatonica. Inutilmente io mi sforzai di rinvenire questa legge ne' varj metodi empirici de' quali si valgono i maestri d' organo. Ecco impertanto la legge che, sperimentalmente procedendo, ho potuto determinare:

Nelle canne a bocca, ad altri elementi costanti, i toni di una scala diatonica richiedono lunghezze nel corpo della canna e larghezze nella bocca che sieno rappresentate dai numeri:

$1;\ ^{8}/_{9};\ ^{4}/_{5};\ ^{3}/_{4};\ ^{2}/_{3};\ ^{3}/_{5};\ ^{8}/_{15};\ ^{1}/_{2}.$

Questa proposizione fu da me determinata con otto canne che sono indicate colle lettere A, B, C, D, E, F, G, H, delle quali seguono le dimensioni:

Di abete		lunghezza . .	$0^{m}_{,}$ 55·02
		larghezza . .	0 03·09
		profondità .	0 03·09
		spessore . .	0 00·06
	B	lunghezza . .	$0^{m}_{,}$ 48·09
		larghezza . .	0 03·05
		profondità .	0 03·05
		spessore . .	0 00·06
	C	lunghezza . .	$0^{m}_{,}$ 44·02
		larghezza . .	0 03·02
		profondità .	0 03·02
		spessore . .	0 00·06
	D	lunghezza . .	$0^{m}_{,}$ 41·03
		larghezza . .	0 03·09
		profondità .	0 03·09
		spessore . .	0 00·06
	E	lunghezza . .	$0^{m}_{,}$ 36·07
		larghezza . .	0 02·79
		profondità .	0 02·79
		spessore . .	0 00·06
	F	lunghezza . .	$0^{m}_{,}$ 33·01
		larghezza . .	0 02·45
		profondità .	0 02·45
		spessore . .	0 00·06
	G	lunghezza . .	$0^{m}_{,}$ 29·04
		larghezza . .	0 02·29
		profondità .	0 02·29
		spessore . .	0 00·06
	H	lunghezza . .	$0^{m}_{,}$ 27·06
		larghezza . .	0 02·19
		profondità .	0 02·19
		spessore . .	0 00·06

Credo ancora a maggior schiarimento di quanto ho riferito superiormente sull' ottava diatonica delle canne a bocca, di presentare il seguente prospetto particolarizzato:

Note	Lunghezza data dall' esperienza.	Larghezza della bocca data dall' esperienza.
Do	0, 55,2	0, 03,9
Re	0, 48,9	0, 03,5
Mi	0, 44,9	0, 03,2
Fa	0, 41,3	0, 03,09
Sol	0, 36,7	0, 02,79
La	0, 33,1	0, 02,45
Si	0, 29,4	0, 02,29
Do	0, 27,6	0, 02,19

Io ho calcolate le lunghezze delle canne e le relative larghezze delle bocche secondo i numeri delle lunghezze delle corde per un' ottava diatonica, ed in luogo dei numeri sopra indicati m' ebbi i seguenti che io espongo in un prospetto.

	Lunghezza della canna.	Larghezza della bocca.
1	= 0, 55,2	0, 03,9
$^8/_9$	= 0, 49,0	0, 03,46
$^4/_5$	= 0, 44,16	0, 03,12
$^3/_4$	= 0, 41,4	0, 02,92
$^2/_3$	= 0, 36,8	0, 02,6
$^3/_5$	= 0, 33,15	0, 02,34
$^8/_{15}$	= 0, 29,44	0, 02,08
$^1/_2$	= 0, 27,6	0, 01,95

Confrontando i numeri dati dall' esperienza con quelli calcolati, si riscontra ben poca differenza. Essa non giugne mai a tre millimetri, quantità che si perdono nelle misure comuni e nel maneggio degli usuali istrumenti nella costruzione delle canne in legno. Si può adunque dire che la lunghezza delle canne e la larghezza delle loro bocche per avere un' ottava diatonica, deve andare diminuendo nella ragione indicata dai rapporti delle lunghezze delle corde, che si danno comunemente da tutti i Trattatisti.

TABELLA

dei volumi d'aria vibrante calcolati cogli elementi dati dall' esperienza.

Do	=	$0^m_,000,839,592$
Re	=	0 000,599,025
Mi	=	0 000,452,608
Fa	=	0 000,394,336
Sol	=	0 000,285,666
La	=	0 000,198,683
Si	=	0 000,154,175
Do	=	0 000,132,372

TABELLA

dei volumi d'aria vibrante calcolati coi dati dei lati teoretici.

Do	=	$0^m_,000,839,592$
Re	=	0 000,588,645
Mi	=	0 000,439,149
Fa	=	0 000,354,203
Sol	=	0 000,241,408
La	=	0 000,181,516
Si	=	0 000,127,369
Do	=	0 000,104,949

TABELLA

dei volumi d'aria vibrante calcolati col volume del *do* fondamentale e i numeri proporzionali delle corde: $^8/_9$; $^4/_5$ ec.

Do	=	$0^m_,000,839,592$
Re	=	0 000,746,304
Mi	=	0 000,671,173
Fa	=	0 000,604,694
Sol	=	0 000,559,728
La	=	0 000,503,755
Si	=	0 000,447,782
Do	=	0 000,429,796

Si vede impertanto che non può essere quest' ultimo metodo eseguito in pratica; e che quello che ho dissopra riferito regge alla prova sperimentale il quale ha il suo fondamento negli elementi della lunghezza della canna e della larghezza della bocca.

Raccolgo finalmente da quanto ho esposto nella serie di queste Memorie, che l'organo vocale dell' uomo non è che un' istrumento a fiato, nel quale si ritrovano i mezzi i più perfetti, perchè l'altezza e la larghezza della bocca vocale o laringe, si presti a tutti i toni musicali nei limiti della voce umana, non solo, ma ancora ai mezzi toni, ai quarti di toni, agli armonici ed alle sfumature perfino del suono. Abbisognava un' analisi la più accurata di acustica; la parte anatomica la più perfetta l'aveano fornita alla scienza Müller e Longet, ai quali io rimetto i lettori de' miei scritti di Acustica.